32ème CONGRÈS DE
L'AFARP

BOURG EN BRESSE

MAI 1996

ACCORD

INFLUENCE DE L'INHARMONICITÉ SUR LES RAPIDITÉS D'INTERVALLES

par Serge CORDIER

INFLUENCE DE L'INHARMONICITÉ SUR LES BATTEMENTS

Ce qu'il y a essentiellement de nouveau dans le domaine de l'accord tient au fait qu'on s'est aperçu depuis quelques années que l'inharmonicité y jouait un rôle non négligeable en modifiant souvent de façon sensible les battements d'intervalles qui, jusqu'à une époque très récente, étaient calculés sans tenir compte de ce phénomène. Or, on le sait maintenant, il s'agit là d'un phénomène très important puisque c'est lui qui donne toute sa vie, toute son originalité aux sons du véritable piano et qui le rend pratiquement inimitable par les contrefaçons électroniques. Pour réaliser l'accord du piano selon la gamme tempérée classique, on pensait que les 3 tierces successives de la partition devaient battre respectivement à 7, 9 et 11 battements à la seconde. Des études plus poussées, menées depuis peu par divers chercheurs et confirmées par l'ordinateur, ont montré qu'un même accord pratiqué sur deux pianos de longueur ou de taille différentes, donnent en fait des battements sensiblement différents. Réciproquement, si l'on réalise sur des pianos de taille différente les trois tierces successives de la partition de manière à ce qu'elles battent sur les différents pianos à 7, 9 et 11, on obtient en fait des accords différents d'un piano à l'autre, avec des gammes s'éloignant toutes de la gamme tempérée. Les plus récents ouvrages consacrés à l'accord tiennent maintenant compte de manière plus ou moins correcte de ce phénomène parfois assez déconcertant pour l'accordeur.

Que se passe-t-il donc? Pour bien le comprendre, je rappellerai d'abord en quoi consiste le phénomène de battement. On sait que les sons musicaux sont produits par des vibrations très rapides : c'est ainsi qu'un son moyen comme le *la3* du diapason correspond à une fréquence de 440 vibrations à la seconde : on dit 440 hz. Les sons audibles par l'oreille humaine se situent entre environ 15hz pour les sons les plus graves jusqu'à 20.000 hz pour les plus aigus. Le piano va de 22,5 hertz pour le *la* le plus grave jusqu'à environ 4500 hz pour le dernier *do* ou *do7*. Nous n'entendons pas distinctement ces vibrations qui sont trop rapides. Nous les percevons globalement sous la forme d'un son plus ou moins haut et d'autant plus haut que le nombre de vibrations/seconde, c'est à dire la fréquence, est élevé. Si nous n'entendons pas distinctement ces vibrations, nous distinguons par contre très bien des différences de fréquences entre deux sons de fréquences voisines, car il se produit alors un phénomène de battement dont la rapidité est égale à la différence de fréquence entre les deux sons. Si, par exemple, un diapason présente une fréquence de 441 hz et un autre de 440 , et si on les frappe ensemble, on entendra un battement 1 fois par seconde, ce qui correspond à la différence entre 441 et 440. Cette perception est très fine et donc très précieuse car elle nous permet de distinguer 2 sons distants seulement de 1/100ème de ton environ.

En accord, on ne se sert pas des battements entre sons fondamentaux, comme c'est le cas pour les deux diapasons dont nous venons de parler. En effet entre deux notes voisines comme, par exemple, *la* et *sib* , les fréquences sont déjà trop éloignées pour qu'on puisse entendre des battements distinctement. Si, en effet, le *la* présente 440 hz, *sib* en aura alors 466,2. La différence de 26,2 hz est déjà trop grande pour être perçue comme des battements par l'oreille, qui ne les perçoit distinctement qu'en dessous de 15 à 20 battements à la seconde. Les battements que nous utilisons en accord, comme par exemple les 7 battements /seconde de la tierce *fa/ la*, sont des battements se produisant entre certains harmoniques des notes accordées et non pas entre les notes elles-mêmes. Ainsi les 7 battements/seconde que nous percevons lorsque nous jouons la tierce de la partition *fa/ la* ne se produisent pas vraiment entre le *fa* et le *la* (différence 220 - 174 = 46, ce qui est trop élevé pour être perçu), mais entre le 4ème harmonique de *la* et le 5ème de *fa*.

Harmoniques

Lorsqu'on perçoit un son musical (de piano, de clarinette ou de violoncelle, par exemple), on croit n'entendre qu'un seul son. En fait on perçoit, outre le son fondamental (qui est le plus grave et qui paraît être le seul) toute une série de sons plus aigus que l'on ne perçoit que si l'on fait un grand effort d'attention. Ces sons sont appelés harmoniques. Ils se présentent toujours dans le même ordre : si le son fondamental est *fa2* (le *fa* grave de la partition) les harmoniques seront toujours : *fa3 do4 fa4 la4 do5* etc... si le son fondamental est *sol2* , les harmoniques successifs en allant vers l'aigu seront *sol3 ré4 sol4 si4 ré5* etc... si *do2* est la note fondamentale ce sera *do3 sol3 do4 mi5* etc...

On voit qu'on a toujours successivement l'harmonique d'octave, puis l'harmonique de quinte, puis celui de double octave, puis celui de tierce, etc...

Certains sons comportent plus de 20 harmoniques audibles : c'est le cas pour les notes graves du piano. Celles du médium en ont une dizaine et dans l'aigu du piano, il n'y en a plus que 2 ou 3. Les harmoniques sont numérotés à partir de la note fondamentale qui porte le rang 1. L'harmonique d'octave qui occupe le second rang est donc appelé pour cette raison harmonique 2, celui de quinte 3, celui de double-octave 4 et celui de tierce 5 etc...

On sait depuis le 18ème siècle que ces harmoniques présentent tous des fréquences qui sont des multiples de la fréquence du son fondamental. Ainsi le 2ème harmonique ou harmonique d'octave, présente 2 fois la fréquence du son fondamental, le 3ème harmonique, celui de quinte, 3 fois, le 4ème harmonique, celui de double-octave, 4 fois, le 5ème harmonique, celui de tierce, 5 fois la fréquence du son fondamental etc...

INTERVALLES NATURELS (intervalles sans battements)

Pour comprendre pourquoi presque tous les intervalles du piano présentent des battements d'harmoniques et savoir comment on les calcule (par exemple comment on a fixé les fameuses tierces *fa/ la*, *la/ do#* et *do#/ fa* de la partition à 7, 9 et 11), nous allons voir d'abord quelques intervalles particuliers qui ne présentent aucun battement et qu'on appelle intervalles naturels ou encore intervalles purs (c'est à dire sans battement). Revenons à notre échelle d'harmoniques : cette échelle nous présente un certain nombre d'intervalles : entre les rangs 2 et 1 nous avons l'octave, entre 3 et 2 nous avons la quinte, entre 4 et 3 nous avons la quarte, enfin entre 5 et 4, nous avons la tierce majeure ; ceci, quelle que soit la fondamentale, que ce soit un *do*, un *ré*, ou une note quelconque. Ces intervalles qui nous sont proposés par la nature (puisqu'ils se forment spontanément, sans intervention humaine) sont appelés intervalles naturels.

Or ces intervalles ont des propriétés très particulières. On sait que l'impression d'intervalle est caractérisée par un rapport de fréquence. Par exemple, lorsque que nous avons l'impression que deux notes sont à l'octave, c'est que la note aiguë a le double de fréquence de la note grave. Lorsque nous reconnaissons une quinte juste c'est que la note aiguë présente une fois et demi la fréquence de la note grave: 100 et 150 (*sol* et *ré* grave) par exemple. Quels sont les rapports de fréquences des intervalles naturels, c'est à dire ceux que nous propose la résonance naturelle (appelé encore "génération harmonique" pour reprendre le terme employé par le grand RAMEAU) ? On voit clairement que l'octave naturelle correspond au rapport de fréquence 2/1 (c'est l'octave que nous sommes censés réaliser au piano), la quinte à 3/2,(c'est la quinte orchestrale, celle qui correspond à l'accord des instruments à cordes de l'orchestre), la quarte à 4/3, la tierce majeure naturelle à 5/4, la mineure à 6/5, etc...

Les intervalles naturels se caractérisent donc par le fait qu'ils correspondent à des rapports de fréquences extrêmement simples, faits de nombres entiers:

2/1 = 2 = octave nat.,
3/2 = 1,5 = quinte nat.,
4/3 = 1,333.. = quarte nat,
5/4 = 1,25 tierce nat.

Or le fait qu'ils présentent des rapports simples de nombres entiers donnent aux intervalles naturels une propriété très particulière : en effet les intervalles naturels ne présentent aucun battement (c'est pourquoi on les appelle aussi intervalles purs). Pourquoi ? Je vais m'efforcer de le montrer, avec successivement l'exemple de l'octave, de la quinte puis de la tierce.

INTERVALLES TEMPÉRÉS (c'est à dire appartenant à la gamme tempérée et correspondant donc en principe à l'accord traditionnel du piano)

Lorsque nous accordons un piano, nous nous efforçons de réaliser certains battements (tierces 7, 9, 11, quarte battant en principe par excès, quintes par défaut). Seule l'octave reste théoriquement naturelle dans l'accord traditionnel, mais alors la quinte ne l'est plus. Dans l'accord en quintes justes dont j'ai inventé la théorie, c'est la quinte et elle seule qui reste en principe naturelle mais l'octave ne l'est plus. C'est donc que l'accord du piano, à deux exceptions près, n'utilise pas des intervalles naturels, c'est à dire des rapports simples tels que 5/4 , 4/3, 3/2 ou 2/1 caractérisant les intervalles naturels, mais des rapports compliqués : en conséquence, presque tous les intervalles battent. Quels sont donc les rapports de tierce, de quarte, de sixtes ou de quinte dans la gamme tempérée ? Pour le savoir, il nous faut connaître d'abord les fréquences de la gamme tempérée. On sait que, depuis le milieu du 18ème siècle environ, les instruments à clavier, et tout particulièrement le piano, né à cette époque, sont accordés en principe selon ce système appelé aussi tempérament égal. Celui-ci est basé sur le partage de l'octave naturelle (dépourvue de battements) en 12 demi-tons égaux. On part du principe, connu depuis le 18ème siècle, que l'impression d'octave correspond à un doublement du nombre des vibrations à la seconde. Ainsi quand on passe du *la3* du diapason au *la4* qui se trouve une octave plus haut, on passe d'un son qui présente 440 vibrations à la seconde à un second qui en présente 880.
Une octave plus bas que le *la3* se trouve le *la2* de la partition qui en présente 440/2 = 220. Une octave plus bas, le *la1* présente 110 hertz, le *la0* en a 55 et le *la-1*, la première note du piano ne présente plus que 22,5 hertz. En allant vers l'aigu, le *la4* ayant 880hz, il en résulte que le *la5* en a 1760 et le dernier *la*, le *la6*, 3520 hz :

la-1 ------ -la0 ---------- la 1 --------la 2—---------LA3-----------la 4———la 5———la 6
22,5 55 110 220 440 880 1760 3520

Revenons aux octaves qui séparent tous les *La* du piano. En observant le tableau ci-dessus on constate :

- que le rapport de l'octave *la0/ la-1*, est : 55/22,5, c'est à dire 2
- que le rapport la*1/la-1* correspondant à 2 octaves est 110/22,5 soit 4 ou 2 x 2, ce qui s'écrit 2^2
- que le rapport *la2/la-1* de 3 octaves est 220/22,5 soit 8 ou 2 x 2 x 2 ou 2^3
- que le rapport de *LA3/la-1* de 4 octaves est 440/22,5 soit 16 ou 2 x 2 x 2 x 2 ou 2^4
- que le rapport de *la4/la-1* de 5 octaves est de 880/22,5 soit 32 ou 2 x 2 x 2 x 2 x 2 soit 2^5
etc...

On voit que le rapport de 5 octaves ne sera pas égal à 2x5 = 10 mais à 2 multiplié 5 fois par lui-même, ce qu'on appelle 2^5 = 32

Réciproquement si l'on sait que le rapport de cinq octaves correspond à 32, et que l'on veut connaître le rapport correspondant à une seule octave, il ne faudra pas diviser 32 par 5, ce qui donnerait 6,5 et ne correspondrait pas du tout au rapport d'une octave, mais il faudra chercher le nombre qui, multiplié 5 fois par lui-même redonne 32 : c'est ce qu'on appelle la racine 5ème de 32, ce qui s'écrit $32^{1/5}$ et ce nombre c'est bien 2.

Revenons à la gamme tempérée : dans cette gamme on partage l'octave correspondant au rapport 2/1 en 12 demi-tons égaux. Nous allons voir comment on calcule les fréquences de chacune des notes de la partition
fa2/ fa3. Le *la* de la partition qui est une octave en dessous a donc 220 vibrations/sec. Pour savoir quelle est la fréquence du *sib*, il faut multiplier 220 par le rapport correspondant à un demi-ton. Je sais que l'octave est divisée en 12 demi-tons. Par conséquent le rapport de demi-ton, c'est le nombre qui, multiplié 12 fois par lui-même, redonne 2. Par conséquent le rapport de demi-ton, ce n'est pas 2 : 12, mais la racine 12ème de 2, ce qui s'écrit $2^{1/12}$. Ce nombre, qui est très facile à trouver avec une petite calculette est égal à :

1,05946... car :

1,05946 x 1,05946 x 1,05946 x 1,05946 X 1,05946 x 1,05946 x 1,05946 x 1,05946 x 1,05946 X 1,05946 x 1,05946 x 1,05946 = $1,05946^{12}$ = 2

Muni du rapport, de demi-ton, 1,05946..., il m'est maintenant facile de calculer toutes les fréquences des notes de la partition de la gamme tempérée:

13 fa : 220 x 0,5946 x 1,05946 x 1,054946 x 1,05946 x 1,05946 x 1,05946 x1,05946 x 1 ,05946=349, 2
12 mi : 220 x 0,5946 x 1,05946 x 1,054946x 1,05946x 1,05946 x 1,05946 x 1,05946 =3 2 9,6
11 mib 220 x 0,5946 x1,05946 x 1,054946x 1,05946x 1,05946 x 1,05946= 311,1
10 ré 220 x 0,5946 x1,05946 x 1,054946x I,05946x 1,05946 =293,61
9 do#: 220 x 1,05946 x1,05946 x 1,054946 x1,05946 = 277,18
8 do : 220 x 1,05946 x1,05946 x 1,054946 = 261,62
7 si : 220 x 1,05946 x1,05946 = 246,9
6 sib : 220 x 1,05946 = 233,08
5 la2 220
4 sol# : 220 : 1,05946 = 207,65
3 sol : 220 : 1,05946 : 1,05946 = 196
2 fa# : 220 : 1,05946 : 1,05946 : 1,05946 = 185
1 fa : 220 : 1,05946 : 1,05946 : 1,05946 : 1,05946= 174,61

Disposant de ces fréquences, nous sommes maintenant en mesure de calculer les battements des intervalles tempérés comme on le faisait jusqu'à maintenant.

Examinons par exemple le cas de la tierce *fa/ la* en la comparant à celle de la tierce naturelle. Si le *la* est fixé à 220, le *fa* de la tierce naturelle aura une fréquence égale au 4/5ème de celle du la : 220 x 4 /5 = 176 hz. (figure de droite). Le *fa* de la tierce tempérée sera plus bas puisque le calcul que nous avons fait ci-dessus nous montre que sa fréquence ne sera que de 174,6 hz.

Tierce tempérée		Tierce naturelle	
	4 la 880	5 la : 880	4 la : 880
5 la : 873			
4 fa : 698,4	3 mi : 660	4 fa : 704	3 mi : 660
3 do : 523,8		3 do : 528	
	2 la : 440		2 la : 440
2 fa : 349,2		2 fa : 352	
	1 la : 220		1 la : 220
1 fa : 176		1 fa : 174,61	

Dans le cas de droite (tierce naturelle 5/4), il n'y a pas de battements car le 5ème harmonique du *fa* a la même fréquence que le 4ème harmonique du *la* :

220 x 4 = 880
176 x 5 = 880

Dans le cas de gauche (tierce tempérée), le 4ème harmonique du *la* est nettement plus haut que le 5ème du *fa*. La différence de fréquence qui est de 7 vibrations/sec engendre des battements :

220 x 4 = 880
174,6 x 5 = 873
Différence = Battement = 7

Sur les mêmes principes, il est facile de calculer la rapidité des tierces *la/ do#* et *do#/ fa* :

Rapidité de la tierce *la/ do#* : la fréquence de *do#* est de 277,2 hz et celle de *la* de 220 hz. On a donc :

277,2x 4 = 1108,8
220 x 5 = 1100
Battement = 8,8 (arrondi à 9)

Rapidité de la tierce *do#/ fa* : la fréquence de *do#* est de 277,2 hz et celle du *fa* de 349,2 :

349,2 x 4= 1396,8
277,2 x 5 = 1386
Battement = 10,8 (arrondi à 11)

Voici donc d'où viennent les fameuses rapidités 7, 9 et 11 des trois tierces partageant l'octave de la partition *fa2/ fa3*.

On peut aussi calculer la rapidité d'une quinte tempérée comme, par exemple, *sib/ fa* ; la fréquence de *fa* est 349,2 et celle de *sib* 233,1 :

349,2 x 2 = 698,4
233,1 x 3 = 699,3
Battement = - 0,9 (arrondi à -1) etc...

En fait, on sait depuis peu que ces calculs ne correspondent pas aux battements qu'on entend réellement lorsqu'on réalise exactement les fréquences de la gamme tempérée que nous avons calculées ci-dessus. Pour réaliser strictement les fréquences de la gamme tempérée on peut se servir d'un accordeur électronique, appareil mis au point depuis une vingtaine d'années environ. On croyait pouvoir obtenir avec ces instruments un excellent accord du piano puisqu'on réalisait ainsi avec une très grande précision les fréquences de la gamme tempérée. Il a fallu déchanter : l'accord obtenu est médiocre et d'autant plus médiocre que le piano est court. Il est à peu près correct dans le médium mais les aiguës et les basses sont fausses et, encore une fois, les battements ne sont pas du tout ceux qu'on attendait. Ces distorsions des battements tiennent à un phénomène dont on n'avait pas tenu suffisamment compte jusqu'ici dans les calculs de battements et qu'on appelle l'inharmonicité des cordes du piano. Leur raideur fait que, contrairement à ce qu'on pensait, les harmoniques qu'elles émettent ne sont pas des multiples de la fréquence des sons fondamentaux, mais sont décalés vers le haut, et cela d'autant plus qu'un harmonique est de rang élevé. C'est pourquoi les acousticiens utilisent pour les désigner le nom de partiel (le partiel d'octave est le partiel 2, celui de quinte le 3, etc...), réservant le terme d'harmonique aux multiples exacts. Cette inharmonicité qui est en général très faible pour le son fondamental augmente très vite puisqu'elle augmente comme le carré du rang du partiel ; c'est ainsi que pour la tierce qui correspond à l'harmonique 5, le décalage sera 5 x 5 = 25 fois plus grand que pour le son fondamental. Mais ce décalage, répétons-le, varie selon les pianos. Ce déplacement des harmoniques vers l'aigu a été bien mis en évidence en photographiant en quelque sorte le son, ce qu'on peut réaliser facilement depuis quelque temps grâce à l'ordinateur et à des logiciels diffusés par l'IRCAM à Paris. On fait alors ce qu'on appelle un sonagramme, qui est une photographie précise du son, où l'on voit apparaître sur une image le son fondamental et ses divers partiels. On peut alors mesurer leurs fréquences avec précision et mettre en évidence le phénomène d'inharmonicité, et l'on peut, en réalisant le sonagramme d'une tierce ou de tout autre intervalle, "photographier" en quelque sorte les battements entre deux partiels voisins. Ceux-ci apparaissent sous la forme de deux traits parallèles et voisins. On mesure alors les différences de fréquences entre les deux traits, c'est-à-dire le nombre de battements à la seconde, et cela correspond alors exactement à ce qu'entend l'oreille ainsi qu'aux calculs d'inharmonicité.

Peut-on mesurer l'inharmonicité d'un piano et prévoir quelles vont être les modifications ou distorsions des battements d'harmoniques qu'elle va entraîner? Tout-à-fait en ce qui concerne les cordes d'acier, où les lois sont bien connues comme je vais le montrer brièvement. Par contre, on ne connaît pas encore bien les lois concernant les cordes filées. Dans ce dernier cas, si l'on veut vraiment prévoir les battements qui vont se produire sur un piano, on ne peut pas encore les calculer avec précision. Il faut les mesurer soit avec un accordeur électronique, soit avec un ordinateur. Muni de ces données, il reste à chercher à l'oreille et en connaissance de cause les meilleures solutions qui ne sont pas forcément les mêmes d'un piano à l'autre.

Inharmonicité des cordes d'acier

On peut facilement la calculer en connaissant la longueur de la corde, son diamètre et sa fréquence. On obtient alors, mesurée en cent (c'est-à-dire en centième de demi-ton), l'inharmonicité du son fondamental.

$$\text{inh} = 3{,}42 \times 10^{15} \times \mathbf{d}^2 / \mathbf{l}^4 \times \mathbf{f}^2$$

où **d** est le diamètre de la corde, **l**, sa longueur et **f** sa fréquence. Le nombre 3,42 est une constante caractérisant les cordes d'acier. Elle ne serait pas la même pour un autre métal.

Pour connaître alors l'inharmonicité de chaque partiel, il faut multiplier l'inharmonicité du son fondamental par le carré du rang du partiel. L'inharmonicité du son fondamental sera donc :

multipliée par	$2^2 = 4$	pour le 2ème partiel (partiel d'octave)
multipliée par	$3^2 = 9$	pour le 3ème partiel (partiel de quinte)
multipliée par	$4^2 = 16$	pour le 4ème partiel (partiel de 2ble octave)
multipliée par	$5^2 = 24$	pour le 5ème partiel (partiel de tierce)
multipliée par	$6^2 = 36$	pour le 6ème partiel etc...

On voit que l'inharmonicité, même si elle est très faible pour le son fondamental , augmente très vite avec le rang du partiel.

Prenons un exemple : supposons que le *la2* de la partition, qui vibre à 220 hz (440:2), présente une inharmonicité de 0,3 cents ; l'inharmonicité de ses cinq premiers partiels sera alors la suivante :

Inharmonicité du 5ème partiel *do#5* = 0,3 x 25= 7,5 cents
Inharmonicité du 4ème partiel *la4* = 0,3 x 16= 4,8 cents
Inharmonicité du 3ème partiel *mi4* = 0,3 x 9= 2,7 cents
Inharmonicité du 2ème partiel *la3* = 0,3 x 4= 1,2 cents
Inharmonicité du fondamental = 0,3

Comme le son fondamental de 220 hz a lui-même une inharmonicité de 0,3 cent, on cherche ensuite la différence d'inharmonicité entre les différents partiels et le fondamental, c'est à dire l'inharmonicité relative de chaque partiel par rapport au son fondamental : ce sera 7,5 - 0,3 = 7,2 pour le 5ème partiel, 4,8 - 0,3 = 4,5 pour le 4ème partiel etc... Pour obtenir directement cette inharmonicité relative, on a donc intérêt à multiplier l'inharmonicité du son fondamental non pas par le carré du rang du partiel, mais par le carré auquel on retranche 1. Cela revient au même mais c'est bien plus rapide : on aura donc :

Inharmonicité relative du 5ème partiel *do#5* = 0,3 x 24 = 7, 2 cents
Inharmonicité relative du 4ème partiel *la4* = 0,3 x 15 = 4,5 cents
Inharmonicité relative du 3ème partiel *mi4* = 0,3 x 8 = 2,4 cents
Inharmonicité relative du 2ème partiel *la3* = 0,3 x 3 = 0, 9 cents

On pourra alors facilement calculer la fréquence d'un partiel quelconque de ce *la3*. Pour cela, on commence par chercher les harmoniques exacts du son fondamental, c'est à dire ici les multiples de 220 (voir colonne de gauche du tableau ci-dessous). Puis on multiplie les fréquences de chacun de ces harmoniques par un rapport correspondant à l'inharmonicité relative de chaque partiel calculée ci-dessus. On obtient alors la fréquence du partiel réel.

Prenons un exemple : nous voulons savoir quel va être la fréquence du 3ème partiel de *la2*. Nous commençons par multiplier le son fondamental de *la2* par 3, nous obtenons la fréquence du 3ème harmonique : un *mi4*. Elle est de 220 x 3 = 660 hz (1ère et 2ème colonne). L'inharmonicité relative du 3ème partiel est de 2,5 cent (3ème colonne). Cet intervalle représente un rapport égal au rapport correspondant à un cent, soit, 1,0005778, élevé à la puissance 2,5. Cela s'écrit $1{,}0005778^{2,5}$. On obtient très vite le résultat avec une calculette, c'est 1,00145. Il ne reste plus qu'à multiplier la fréquence de l'harmonique par ce rapport correspondant à l'inharmonicité soit : 660 x $1{,}0005778^{2,7}$ = 660 x 1,00145= 660,92 (4ème colonne)

Harmoniques théoriques		Inh. relative (en cents)	Partiels réels
5do#5 :	1100	7,2	1100 x $1{,}0005778^{7,2}$ = 1104,58
4 la4 :	880	4,5	880 x $1{,}0005778^{4,5}$ = 882,29
3 mi4 :	660	2,4	660 x $1{,}0005778^{2,4}$ = 660,92
2 la3 :	440	0,9	440 x $1{,}0005778^{0,9}$ = 440,22
1 la2 :	220		220

En comparant les partiels aux harmoniques théoriques, on remarque que les partiels se trouvent toujours plus haut et cela d'autant plus que le rang du partiel est élevé. On voit que l'harmonique d'octave (le second) n'est pas très affecté par l'inharmonicité (440,22 contre 440). Celui de quinte (le 3ème) l'est davantage puisque il gagne environ 1 hz (660,91 -660). Mais le plus affecté est celui de tierce puisque le partiel se trouve 4,5 hz plus haut que le véritable harmonique. Les battements de tierce et de ses redoublements (l0ème et 17ème) vont donc être très sensiblement modifiés par l'inharmonicité comme nous allons le voir. Il est évident que les décalages entre harmoniques et partiels seront différents pour chaque note du piano puisque chaque note a sa propre inharmonicité. L'inharmonicité croît du grave à l'aigu et double environ toutes les 7 ou 8 notes. Par ailleurs, chaque modèle de piano présente sa propre inharmonicité qui est fonction de la longueur des cordes. Plus une corde est courte, et plus l'inharmonicité est grande. Un petit piano ou un crapaud, présente dans le médium une inharmonicité beaucoup plus forte qu'un piano de bonne taille ou un queue de concert. Les déformations des battements dues à l'inharmonicité ne seront pas du même ordre de grandeur selon les instruments. L'inharmonicité du piano est-elle un défaut du piano ? Probablement pas. Le caractère du son du piano et son charme assez inimitable électroniquement, tiennent en grande partie à l'inharmonicité. Mais l'inharmonicité doit être maîtrisée par le facteur lors du calcul du plan des cordes. Une inharmonicité non maîtrisée entraîne des déformations anarchiques des battements et rend un piano pratiquement inaccordable. L'instrument sera toujours faux. C'est pourquoi depuis une vingtaine d'années environ, les facteurs d'instrument calculent avec le plus grand soin la progression de l'inharmonicité. Assez curieusement, les conséquences de l'inharmonicité sur l'accord n'avaient pas été calculées jusqu'à une époque récente, excepté par Klaus FENNER. J'y suis venu moi-même ces dernières années pour calculer les conséquences de ce phénomène sur la gamme tempérée mais aussi sur le tempérament égal à quintes justes que j'ai théorisé à partir de ce que faisait mon maître à accorder, Simon DEBONNE, 1er accordeur d'une grande Maison de pianos de Paris. Un ouvrage consacré à ce travail est en préparation qui doit paraître dans les prochaines années.

MODIFICATIONS DES BATTEMENTS AVEC L'INHARMONICITÉ

Les calculs de battements d'intervalles utilisés jusqu'à ce jour ne tenaient pas du tout compte de l'inharmonicité. Tout était calculé comme si ce phénomène n'existait pas. Ainsi on pensait, par exemple, que dans la gamme tempérée les 3 tierces partageant l'octave de la partition *fa2/ fa3* devaient toujours battre à 7, 9 et 11. Or elles battent toujours moins et ce ralentissement est d'autant plus marqué que le piano est court : sur certains pianos, lorsqu'on réalise la gamme bien tempérée strictement, la tierce *fa/ la* peut ne présenter que 6 battements/seconde et même 5, voire en dessous de 5 dans les plus mauvais cas lorsque l'inharmonicité est très forte et surtout mal calculée par le facteur. Selon Klaus FENNER, la tierce *fa/ la* qui doit battre théoriquement à 7, bat toujours à moins de 6,7, rapidité qui n'est atteinte que dans les meilleurs cas (grands pianos de concert). En général cette rapidité tourne autour de 6, mais sur les petits pianos, cités toujours par Klaus FENNER, elle peut tomber à 5 voire à 4,4. FENNER écrit : " ces valeurs sont calculées à partir d'un petit piano typique. L'instrument a été construit au cours des années cinquante, mais le modèle était encore fabriqué jusqu'à la fin des années soixante. De nombreux instruments de ce type sont actuellement en usage et doivent donc être accordés." et un peu plus loin ... " les battements de tierces sont plus lents ainsi que ceux des quartes. Par contre les quintes sont plus rapides. Cela ne pose pas de problème sérieux à l'accordeur expérimenté qui essaiera de trouver le meilleur compromis. Mais n'ayant plus le guide d'un chiffre, ce compromis peut varier d'une fois à l'autre. La règle normale de l'habitude joue alors moins puisque le problème se présente différemment selon les pianos". Cette déformation, bien que gênante pour l'accordeur, reste toutefois limitée, tout au moins lorsqu'il s'agit de petits intervalles comme la tierce, excepté sur les pianos vraiment trop courts. Mais sur les grands intervalles, comme les l0èmes ou les 17èmes (tierces une fois et deux fois redoublées), la déformation est très importante et elle peut être spectaculaire même sur les très bons pianos comme un Steinway de concert. Qu'on en juge par l'exemple suivant !

Prenons une 17ème majeure comme *réb3/ fa5*. On sait qu'en principe cette 17ème doit battre comme la dernière tierce de la partition *réb3/ fa3*, c'est à dire à 11 battements/seconde environ. Sur un Steinway de concert où l'inharmonicité est relativement très faible, le *réb* présente une inharmonicité fondamentale de 0,3 cents environ. Nous allons donc calculer quelle sera en réalité la rapidité de cette 17ème si l'on reste dans la gamme tempérée à octaves naturelles correspondant au rapport 2/1.

Dans une 17ème majeure telle que *réb3/ fa5*, le battement est dû à ce que le 5ème harmonique du *réb*, un *fa5* est voisin du *fa5* correspondant à la note aiguë de la 17èrne. Rappelons que la fréquence de *réb* est de 277,18 hz et que celle du *fa5*, note aiguë de la 17ème, est facile à calculer : le *fa5* est en effet 2 octaves plus haut que le *fa3* de la partition. Sa fréquence est donc:

$$349{,}23 \times 2^2 = 349{,}23 \times 4 = 1\ 396{,}9 \text{ hz}$$

Si le piano ne présentait pas d'inharmonicité, ce *fa5* battrait avec l'harmonique de rang 5 du *réb* et la rapidité de la 17ème serait égale à la différence de fréquence entre le f*a5* et le 5ème harmonique de *réb3* :

Fa5 = 1396,91 hz
5ème harmonique de *réb3* = 5 x 277,18 = 1 385,9
Différence = battements = **11**

C'est bien cette rapidité qu'on donnait jusqu'à maintenant. Mais la réalité est autre car le *réb3* a en réalité une inharmonicité de 0,3 cents. Par conséquent l'inharmonicité de son 5ème partiel va être de :

0,3 x 24= 7,2 cts

La fréquence de ce partiel va donc se trouver à 7,2 cents au-dessus de celle de l'harmonique, ce qui donne en fréquence :

$$1\ 385{,}9 \times 1{,}0005778..^{7-2} = 1\ 391{,}7$$

La 17ème ne battra plus qu'à :

fréquence de *fa5* = 1 396,9
- fréquence du 5ème harmonique = 1 391,7
Différence = battement réel = soit **5,2**

Ce n'est même pas la moitié de ce qu'on calculait jusqu'à maintenant !! Naturellement l'accordeur ne va pas réaliser un battement aussi lent (l'accordeur électronique, lui, le fera puisqu'il est conçu pour réaliser les fréquences de la gamme tempérée!!) mais il va placer le *fa5* de manière à ce qu'il batte bien à 11 battements/seconde avec le *réb*, (comme la tierce *réb/ fa* de la partition), ce qui aura pour effet de "corriger" automatiquement par l'oreille l'inharmonicité du piano. Pour que la 17ème batte à 11, il va donc placer le *fa5* à :

1391,7+ 11 = 1402,7

Si nous avons maintenant la curiosité de savoir ce que devient l'octave dans ce processus, nous devons comparer la fréquence du *fa5* à celle du *fa3*, deux octaves en dessous. Le rapport de double-octave qui est théoriquement de 4 (2x2) devient :

1402,7 : 349,23 = 4,017

l'octave vaut alors en moyenne : $4{,}01\ 7^{1/2}$ = 2 ,00424 et la quinte :

$2{,}00412^{7/12}$ = 1,5

En d'autres termes, elle redevient juste et la gamme que tend à réaliser alors l'accordeur n'est plus la gamme tempérée à quintes tempérées mais bien le tempérament égal à quintes justes qui compense l'inharmonicité du piano et tend redonner à la quinte et par conséquent aux autres intervalles leur valeur juste orchestrale. Voilà pourquoi l'accord fait "à l'oreille" est supérieur à l'accord strictement tempéré de l'électronique.

CALCUL D'INHARMONICITÉ SUR LES 3 TIERCES PARTAGEANT L'OCTAVE: *FA/ LA*, *LA/ D0#* ET *D0#/ FA*, BATTANT THÉORIQUEMENT A 7,9 ET 11.

Nous avons vu que la modification de la rapidité des intervalles variait selon les pianos. Les rapidités que nous allons calculer pour le partage de l'octave de la partition en 3 tierces ne sont donc valables que sur un piano déterminé, présentant une inharmonicité particulière. Pour l'exemple dont il est question ici, nous avons pris un piano HELLAS qui présente les inharmonicités suivantes pour les notes formant ces trois tierces :

fa2: 0,178 cents , *la* : 0,1 72, *do#* : 0,226 cents et *fa3* : 0,309

Les fréquences de ces notes en gamme tempérée sont les suivantes :
fa2 : 1 74,61 hz, *la* : 220 hz, *do#* : 277,18, *fa3* : 349,23

TIERCE FA LA
(sans inharmonicité)

4la4 : 880
5la4 : 873

1LA2 : 220
1 FA2 1 74,6

Battements: 880-873 = 7

TIERCE FA LA
(avec inharmonicité du piano HELLAS)

4la4 = 880x $1{,}0005778^{0{,}17\,2}$ x 15=881,3
5 la4 873 x $1{,}0005778^{0{,}178}$ x 24 = 875,2

1 LA2 : 220
1 FA2 174,6

Battements : 881,1 - 875,2 = 6,1

TIERCE LA D0#
(sans inharmonicité)

4do#: 1108,7
5do# 1 100

1DO# : 277,2
1 LA2 220

Battements: 1 108,7 - 1 100 = 8,7

TIERCE LA D0#
(avec inharmonicité du piano HELLAS)

4do# = 1108,7 x $1{,}0005778^{0{,}226}$ x 15 = 1110,9

5 do# 1100 x $1{,}0005778^{0{,}172}$ X 24 = 1102,6

1DO#: 277,2
1 LA 2 220

Battements: 1 100,9 - 1 102,6 = 8,3

TIERCE DO#FA
(sans inharmonicité)

4 fa5 : 1397
5fa5: 1 386

1 FA3 : 349,25
1Réb3 : 277,2

Battements: 1397-1386 =11

TIERCE DO#FA
(avec inharmonicité du piano HELLAS)

4 fa5 : 1397 x $1{,}0005778^{0{,}309}$ x 15=1400,7
5 fa5 : 1 386 x $1{,}0005778^{0{,}226}$ x 24 = 1390,3

1 FA3 : 349,25
1 Réb3 : 277,2

Battements : 1400,7 - 1390,3= 10,4

UN CALCUL INTÉRESSANT :

Que va-t-il se passer si l'accordeur essaie de faire battre sur un piano les tierces *fa/ la*, *la/ do#* et *do#/ fa* à 7,9 et 11 comme on le lui a appris en école d'accord ? Voyons ce qui va se passer sur notre piano HELLAS, présentant l'inharmonicité de 0,1 78 cents pour *fa2*, de 0,1 72cents pour *la2*, de 0, 226 cents pour *do#3* et de 0,309 pour *fa3*.

Supposons qu'il place son l*a2* exactement à 220 hz. Le 4ème partiel de *la2* va se trouver à 881,3 hz comme nous l'avons déjà calculé ci-dessus. Il battra avec le 5ème partiel de *fa2* à 7, conformément à la théorie ; donc ce 5ème partiel sera à :

$$881{,}3 - 7 = 874{,}3.$$

Quel sera dans ces conditions la fréquence du *fa2* ? Le rapport entre le partiel 5 de *fa2* et le *fa2* lui-même ne sera pas égal à 5 , puisque le *fa2* a 0,178 cents d'inharmonicité: le 5ème partiel aura donc une inharmonicité de 0,178 cents x 24 = 4,272. Le rapport entre le partiel 5 et le *fa2* sera donc de :

$$5 \times 1{,}0005778^{4{,}272} = 5{,}01235$$

et la fréquence de *fa2* sera :

874,3 : 5,021235 = 1 74,4 au lieu de 1 74,6(sans inharmonicité)

Revenons au *la2* qui est placé à 220 hz. L'accordeur va alors accorder le *do#* de manière à ce que la tierce la *do#* batte à 9. La fréquence du 5ème partiel de la va être de :

$$220 \times 5 \times 1{,}0005778^{0{,}172 \times 24} = 1102{,}6 \text{ hz}$$

Pour que la tierce batte à 9, le 4ème partiel de *do#* devra se trouver à :

$$1102{,}6 + 9 = 1111{,}6 \text{ hz}$$

Quel sera dans ce cas la fréquence de *do#3*? Le rapport entre *do#3* et son 4ème partiel sera égal à 4 multiplié par un rapport correspondant à l'inharmonicité de son 4ème partiel, soit :

$$4 \times 1{,}0005778^{0{,}226 \times 15} = 4{,}00784$$

La fréquence de *do#3* sera donc :

$$1111{,}6 : 4{,}00784 = 277{,}3$$

L'accordeur va ensuite accorder le *fa3*, de manière à ce que la tierce *do#(réb)*3 *fa*3 batte à 11. La fréquence du 5ème partiel de *réb3* va être :

$$277{,}3 \times 5 \times 1{,}0005778^{0{,}226 \times 24} = 1390{,}8 \text{ hz}$$

Pour que la tierce *réb3/ fa3* batte à 11, il faut que le 4ème partiel de *fa2* soit 11 hz au-dessus du 5ème de *réb3*, soit à :

$$1390{,}8 + 11 = 1401{,}8 \text{ hz}$$

Quelle sera dans ce cas la fréquence du *fa3* ? le rapport entre ce *fa3* et son 4ème partiel sera de :

$$4 \times 1{,}0005778^{0{,}309 \times 15} = 4{,}011$$

Donc la fréquence du *fa3* sera :

$$1401{,}8 : 4{,}011 = 349{,}5 \text{(au lieu de } 349{,}2\text{)}$$

Au lieu d'être pour *fa2* de 174,6, pour *la2* de 220, pour *do#* de 277,2 et pour *fa3* de 349,2, les fréquences vont être respectivement de 174,4, de 220, de 277,3 et de 349,5. L'octave va donc être légèrement agrandie, elle va correspondre au rapport de 349,5 / 174,4 soit 2,004 au lieu de 2, ce qui correspond à une différence de hauteur de 1 203,5 cents au lieu de 1200 pour une octave juste. Il n'est pas sans intérêt de voir quelle va être là encore le rapport de quinte. Le rapport de demi-ton sera de:

$$2{,}004^{1/12} = 1{,}05964$$

Comme la quinte vaut 7 demi-tons, son rapport sera de:

$$1{,}05964^{7} = 1{,}5$$

soit, à nouveau, le rapport de quinte juste.

CONCLUSION

Le fait pour l'accordeur de respecter les rapidités théoriques établies sans tenir compte de l'inharmonicité va l'amener, étant donnée l'existence bien réelle de ce phénomène, à agrandir légèrement tous les intervalles. L'octave va excéder sa valeur consacrée de 2/1, de ce fait, la quinte va retrouver son rapport de quinte juste correspondant à 3/2 = 1,5. S'il veut respecter les rapidités théoriques, l'accordeur va donc tendre à réaliser non pas la gamme tempérée à quintes tempérées mais plutôt le tempérament égal à quintes justes, celui-là même que j'ai codifié il y a une vingtaine d'années et que réalisait déjà mon maître d'accord, Simon DEBONNE. La question se pose de savoir si les accordeurs qui réalisent ce tempérament le font parce qu'ils trouvent qu'il sonne plus juste ou si celui-ci résulte simplement d'un effet mécanique de l'inharmonicité qui amène l'accordeur à dilater automatiquement les intervalles lorsqu'il cherche à réaliser les rapidités théoriques de la gamme tempérée à savoir 7, 9 et 11 pour les tierces partageant l'octave ou encore à réaliser des l0èmes et des 17èmes aussi rapides que les tierces ayant la même note de basse (Battements de *réb3/fa3* = battements de *réb3/fa4* = battements de *réb3/fa5* = 11).

En d'autres termes, il y a lieu de se demander, maintenant que l'on connaît les effets "dilatatoires" de l'inharmonicité, s'il faut revenir à des intervalles moins battants pour réaliser effectivement la gamme tempérée où s'il faut tendre à réaliser en connaissance de cause le tempérament égal à quintes justes (TEQJ). On sait depuis longtemps ce que j'en pense : aussi ne m'appartient-il pas de trancher. Toutefois je vais donner pour terminer trois arguments qui plaident en faveur du TEQJ :

1) le piano et les instruments à clavier sont les seuls à faire des quintes tempérés. Les instruments d'orchestre et les chanteurs s'accordent par quintes justes

2) on sait ce que donne sur un piano le respect des fréquences de la gamme tempérée : il suffit de se servir pour cela d'un accordeur électronique et de réaliser strictement les fréquences tempérées

3) le grand dictionnaire musical encyclopédique anglais a publié une statistique des octaves réalisées du grave à l'aigu établi par la " *Guilde des accordeurs anglais* ". Le voici :

	Piano à queue moyenne de l'octave	Grand piano droit moyenne de l'octave	Petit piano droit moyenne de l'octave
ré 6			
	1 208 cts	1 209 cts	1 209 cts
ré 5			
	1 206 cts	1 206 cts	1 207 cts
ré 4			
	1 202 cts	1 204 cts	1 206 cts
RE3 du milieu			
	1 202 cts	1 204 cts	1 206 cts
ré2			
	1 204 cts	1 205 cts	1 209 cts
ré1			
	1 209 cts	1 211 cts	1 216 cts
ré0			